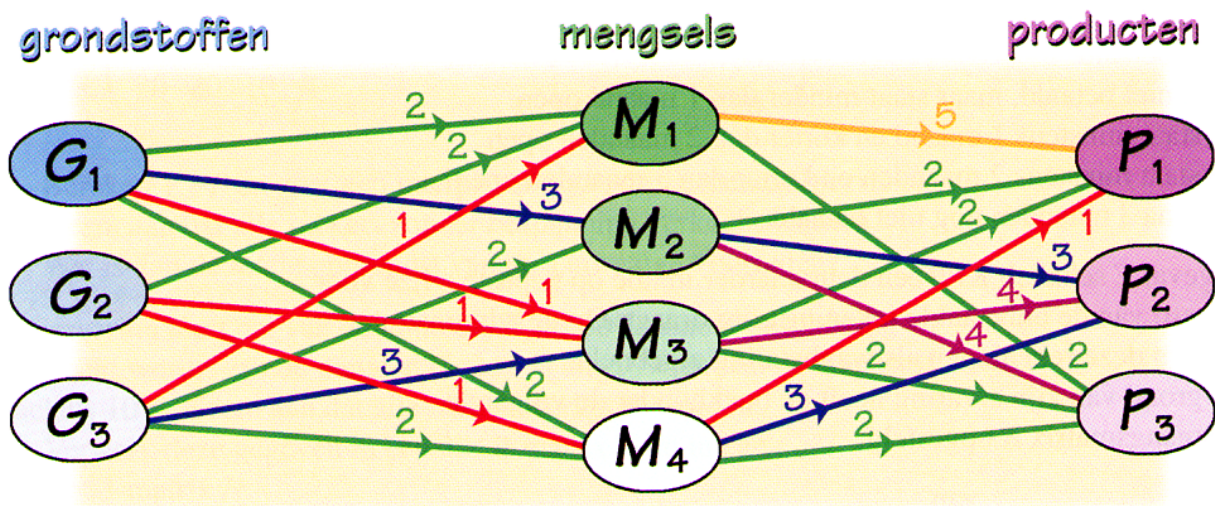


K Grafen en matrices

- 31** In figuur G.8 is een productieproces schematisch weergegeven. Het getal 2 bij de pijl van G_1 naar M_1 geeft aan dat er voor één eenheid M_1 2 eenheden G_1 nodig zijn. En het getal 5 bij de pijl van M_1 naar P_1 geeft aan dat er voor één eenheid P_1 5 eenheden M_1 nodig zijn.



figuur G.8

- Verwerk de getallen bij de pijlen van de grondstoffen naar de mengsels in een 3×4 -matrix A .
- Verwerk de overige getallen in een matrix S zo, dat de productmatrix $C = A \cdot S$ betekenis heeft.
- Bereken $C = A \cdot S$ en geef een interpretatie van de elementen c_{12} en c_{31} .
- Er komt een bestelling binnen voor 10 eenheden van product P_1 , 15 eenheden van product P_2 en 20 eenheden van product P_3 . De kosten per eenheid mengsels M_1, M_2, M_3 en M_4 zijn in euro's 9, 10, 12 en 10. Verwerk de bestelling in een matrix B zo, dat $S \cdot B$ betekenis heeft. Verwerk verder de kosten per eenheid van de mengsels in een matrix K zo, dat $K \cdot S$ betekenis heeft.
- Bereken $S \cdot B$ en $K \cdot S$. Wat stellen de elementen van deze productmatrix voor?
- Bereken $K \cdot S \cdot B$ en geef een interpretatie van de uitkomst.

- 32** Van een stad blijkt een nieuwe woonwijk gebouwd te zijn op sterk verontreinigde grond. Verbetering van de situatie is op korte termijn niet te verwachten. Daarom proberen de bewoners van de gifwijk te verhuizen naar andere gedeelten van de stad. Jaarlijks lukt dit 18% van de bewoners. Uit de rest van de stad wil uiteraard niemand naar de gifwijk.
- Stel de overgangsmatrix V op.
 - Op het moment van de ontdekking van de verontreiniging woonden er 3000 mensen in de gifwijk. In de rest van de stad woonden 55 000 mensen. Hoeveel inwoners telt de rest van de stad na twee jaar?

33 Zie opgave 32 met de overgangsmatrix V .

- a** Het aantal inwoners N_g in de gifwijk na n jaar is een functie van n .
 Stel de formule van N_g op. Stel ook de formule op van het aantal inwoners N_r in de rest van de stad als functie van n .
- b** Na hoeveel jaar wonen er volgens het in vraag a gevonden model voor het eerst meer dan 57 500 mensen in de rest van de stad?

34 Bij postorderbedrijf KPP houdt men bij hoe lang het duurt voordat de klanten hun rekening betalen. De boekhouder van KPP gebruikt voor de rekeningenadministratie de volgende vijf categorieën.

A : is betaald

B : is niet betaald, maar staat minder dan 1 maand open

C : staat minstens 1 maand en korter dan 2 maanden open

D : staat minstens 2 maanden en korter dan 3 maanden open

E : is na 3 maanden nog niet betaald.

In geval E schakelt KPP een deurwaarder in, die op gepaste wijze voor incasso van de onbetaalde rekening zorg draagt. Op de administratie worden deze rekeningen als wanbetaling afgeboekt.

Op grond van zijn ervaring heeft de boekhouder de volgende overgangsmatrix R opgesteld.

$$\begin{array}{c} \text{naar} \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ A \ B \ C \ D \ E \end{array} \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ 1 & 0,9 & 0,7 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix} = R \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = K$$

De elementen van R zijn kansen die allemaal betrekking hebben op een periode van één maand.

- a** Wat is de betekenis van de elementen r_{13} , r_{32} en r_{52} ?
- b** Waarom staan in de tweede rij alleen nullen?
- c** Waarom is $r_{55} = 1$?
- d** Geef de betekenis van $R^3 \cdot K$ en schrijf de elementen van deze productmatrix op.

Op 1 februari 2008 staat € 200 000,- aan rekeningen open bij KPP.

aantal maanden dat rekening openstaat	0–1	1–2	2–3	meer dan 3
bedrag in euro's	120 000	60 000	15 000	5000

- e** Bereken met behulp van matrixproducten het bedrag van de per 1 februari 2008 uitstaande rekeningen waarvoor uiteindelijk de deurwaarder moet worden ingeschakeld.

- 35** In de filialen I en II van een sportzaak worden drie soorten tennisrackets verkocht, namelijk van hout (h), van metaal (m) en van kunststof (k). Bij de jaarlijkse inventarisatie blijken de aanwezige voorraden gegeven te worden door de voorraadmatrix V . De rackets kunnen, al naar gelang de keuze van de koper, met of zonder bespanning worden gekocht. Het bespannen van een racket kost 40 euro extra. De prijzenmatrix P geeft van elk soort de prijs per stuk in euro's.

$$V = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{h} & \text{m} & \text{k} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 40 & 30 & 10 \\ 30 & 20 & 10 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{h} & \text{m} & \text{k} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{onbsp.} & \text{bsp.} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 50 & 90 \\ 120 & 160 \\ 70 & 110 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Bereken $V \cdot P$ en geef een interpretatie van de elementen hiervan.
- Neem aan dat alle rackets zonder bespanning verkocht worden. Wat is dan de totale opbrengst van de aanwezige voorraden?
- De ervaring leert dat van de houten rackets 30% zonder bespanning verkocht wordt, van de metalen rackets is dat 20% en van de kunststof rackets 10%. Neem aan dat alle rackets verkocht worden.
- Verwerk deze gegeven in een 3×2 -matrix G en in een 2×3 -matrix H .
- Bereken de matrix $V \cdot G$. Geef een interpretatie van de elementen van $V \cdot G$.
- Bereken die elementen van $P \cdot H$ die betekenis hebben en geef een interpretatie van deze elementen.

- 36** Bij een bevolkingsonderzoek onder vrouwen in Chili is in 1960 en in 1970 het aantal vrouwen in de leeftijdsklassen 0–9, 10–19, 20–29, ... 70–79 en 80+ vastgesteld. Zie de tabel hieronder, waarin D het gemiddelde aantal dochters per vrouw per tien jaar is. Verder is bekend dat de overlevingskans per tien jaar van een vrouw uit de klasse 80+ bij benadering 0,11 is.

	$\times 1000$ 1960	$\times 1000$ 1970	D
0–9	1090	1264	–
10–19	820	1068	0,52
20–29	618	804	0,83
30–39	477	596	0,45
40–49	383	454	0,08
50–59	267	351	–
60–69	173	223	–
70–79	84	115	–
80+	26	37	–



- Welk element van de hoofddiagonaal van de Lesliematrix L is niet gelijk aan nul?
- Stel de Lesliematrix L op. Rond de elementen af op twee decimalen.
- Geef een voorspelling van de samenstelling van de vrouwelijke bevolking van Chili in 2010.

- 37** In een openbare bibliotheek van een grote stad houdt men bij hoe lang het duurt totdat een nieuw aangeschaft boek voor het eerst wordt uitgeleend. Men onderscheidt hierbij de volgende categorieën.

A : is al eens uitgeleend

B : minder dan een halfjaar geleden aangeschaft, nog nooit uitgeleend

C : tussen een halfjaar en jaar geleden aangeschaft, nog nooit uitgeleend

D : tussen een jaar en anderhalf jaar geleden aangeschaft, nog nooit uitgeleend

E : tussen anderhalf jaar en twee jaar geleden aangeschaft, nog nooit uitgeleend

F : meer dan twee jaar geleden aangeschaft, nog nooit uitgeleend; wordt daarom uit de roulatie genomen.

Op grond van tellingen in de afgelopen jaren is de overgangsmatrix *U* opgesteld.

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0,85 & 0,55 & 0,30 & 0,20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,80 & 1 \end{pmatrix} = U$$

- Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat een boek anderhalf jaar na aanschaf minstens één keer is uitgeleend.
- Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat een boek na twee jaar uit de roulatie wordt genomen, omdat het nog nooit is uitgeleend.

Tellingen op 1 januari 2007 leveren de volgende tabel op.

aantal jaren geleden aangeschaft	0 – 0,5	0,5 – 1	1 – 1,5	1,5 – 2
aantal nog niet uitgeleende boeken	400	50	20	12

- Hoeveel van deze boeken zijn op 1 januari 2008 uit de roulatie genomen, omdat ze nooit zijn uitgeleend?
- Hoeveel van deze boeken zullen naar verwachting uit de roulatie worden genomen, omdat ze twee jaar na de aanschaf nog nooit zijn uitgeleend?
- De directeur van de bibliotheek vindt het aantal boeken dat onuitgeleend uit de roulatie wordt genomen te groot. Daarom krijgen alle leden van de bibliotheek elk halfjaar een overzicht van de nieuwe titels. Op deze lijst staan bovendien als nieuwe boeken vermeld de boeken die nog nooit zijn uitgeleend.
Neem aan dat door deze extra informatie naar de leden toe de elementen u_{12} , u_{13} , u_{14} en u_{15} achtereenvolgens veranderen in 0,9, 0,6, 0,4 en 0,3. De directeur beweert dat hierdoor de helft minder boeken onuitgeleend uit de roulatie zullen worden genomen. Ga met een berekening na of de directeur gelijk heeft.

38 Een kleine ijsfabrikant levert de volgende vier producten.

- vanille-ijs in literpakken
- duo-ijs in literpakken
- aardbeienijs in literpakken
- vanille-ijs in pakjes van 0,125 liter

Het duo-ijs bestaat voor 60% uit vanille-ijs en voor 40% uit aardbeienijs.
De ijsfabrikant levert deze producten in dozen: in een doos gaan óf 16 literpakken van eenzelfde product óf 80 kleine pakjes.

Een winkelier bestelt 15 dozen met literpakken vanille-ijs, tien dozen met duo-ijs, vier dozen met aardbeienijs en acht dozen met kleine pakjes vanille-ijs.

a Bereken hoeveel liter vanille-ijs en hoeveel liter aardbeienijs nodig is voor deze bestelling.

De kosten die de ijsfabrikant maakt bestaan uit grondstofkosten, verpakkingskosten en transportkosten.

- De grondstofkosten zijn € 2,80 per liter vanille-ijs en € 3,10 per liter aardbeienijs.
- De verpakkingskosten zijn € 0,10 per pak of pakje en € 1,10 per doos.
- De transportkosten zijn € 2,10 per doos.

De prijzen die de ijsfabrikant rekent zijn: € 60,- voor een doos vanille-ijs, € 64,- voor een doos duo-ijs, € 70,- voor een doos aardbeienijs en € 80,- voor een doos met kleine pakjes vanille-ijs.

b Bereken de winst van de ijsfabrikant op de bestelling van de winkelier.

Om te bepalen hoeveel liter vanille-ijs en hoeveel liter aardbeienijs hij nodig heeft voor een bestelling, maakt de ijsfabrikant gebruik van een computerprogramma. De benodigde hoeveelheden vanille-ijs (in liters) en aardbeienijs (in liters)

worden door middel van de matrixvermenigvuldiging $M \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ berekend.

Hierbij geldt: a = het aantal dozen met literpakken vanille-ijs
 b = het aantal dozen met literpakken duo-ijs
 c = het aantal dozen met literpakken aardbeienijs
 d = het aantal dozen met kleine pakjes vanille-ijs.

c Geef de matrix M . Licht je antwoord toe.

Het computerprogramma kan ook de winst W in euro's op een bestelling berekenen. Het programma maakt gebruik van de matrixformule

$$W = (A - B \cdot M - C) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \text{ waarin } A, B \text{ en } C \text{ evenals } M \text{ matrices zijn}$$

die door de ijsfabrikant van de juiste elementen moeten worden voorzien.

De matrices A en C moeten als volgt worden ingevuld.

$A = (60 \ 64 \ 70 \ 80)$ en $C = (4,8 \ 4,8 \ 4,8 \ 11,2)$.

d Geef de matrix B . Licht je antwoord toe.

- 39** Van een schildpadsoort is bekend dat er twee keer zoveel mannetjes zijn als vrouwtjes. Elk vrouwtje legt één keer in haar leven een groot aantal eieren waarvan 75% uitkomt. De verandering in leeftijdsopbouw per 25 jaar wordt beschreven door de populatievoorspellingsmatrix L .

$$\text{naar} \begin{matrix} & \text{van} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,50 & 0 \end{pmatrix} & = L \end{matrix}$$

- a** Hoeveel eieren legt een vrouwtje in haar leven? In welke leeftijdsklasse zit ze dan?
- b** Bereken L^4 .
Welke conclusie trek je uit L^4 over de toe- of afname van de populatie schildpadden?
- c** Men neemt steeds de helft van het aantal gelegde eieren weg.
Na hoeveel jaar is er dan nog de helft van het oorspronkelijke aantal schildpadden over?

