

K Grafen en matrices

31 a

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

b

$$S = \begin{matrix} & \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

c De GR geeft

$$A \cdot S = C = \begin{matrix} & \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 20 & 19 & 22 \\ 13 & 7 & 8 \\ 17 & 24 & 20 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

c_{12} geeft aan dat er voor één eenheid P_2 19 eenheden G_1 nodig zijn.
 c_{31} geeft aan dat voor één eenheid P_1 17 eenheden G_3 nodig zijn.

d Voor $S \cdot B$ moet B uit drie rijen bestaan.

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Voor $K \cdot S$ moet K uit vier kolommen bestaan.

$$K = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ 9 & 10 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

e

$$S \cdot B = \begin{matrix} & \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 90 \\ 145 \\ 120 \\ 95 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \text{en} \quad K \cdot S = \begin{matrix} & \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 99 & 108 & 102 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

De elementen van $S \cdot B$ geven aan hoeveel eenheden van de verschillende mengsels er nodig zijn voor de bestelling.

De elementen van $K \cdot S$ geven de kosten per eenheid van de producten P_1 , P_2 en P_3 .

f $K \cdot S \cdot B = (4650)$ = kosten van de bestelling.

32 a Stel g = gifwijk en r = rest van de stad.

$$V = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{van} \\ g & r \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{naar} \\ g & r \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,82 & 0 \\ 0,18 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

b Bereken $V^2 \cdot B$ met $B = \begin{pmatrix} g & 3000 \\ r & 55\,000 \end{pmatrix}$.

$$\text{De GR geeft } V^2 \cdot B = \begin{pmatrix} g & 2017 \\ r & 55\,983 \end{pmatrix}$$

Dus na twee jaar wonen 55 983 mensen in de rest van de stad.

- 33** a $N = 3000 \cdot 0,82^n$
 $N_r^g = 58\,000 - 3000 \cdot 0,82^n$
 (Er wonen in totaal 58 000 mensen in de stad).
 b Los op $58\,000 - 3000 \cdot 0,82^n = 57\,500$
 $-3000 \cdot 0,82^n = -500$
 $0,82^n = \frac{1}{6}$

Voer in $y_1 = 0,82^x$ en $y_2 = \frac{1}{6}$.
 De optie intersect geeft $x \approx 9,03$.
 Dus na 9 jaar.

- 34** a Het element r_{13} geeft de kans dat een klant van categorie C naar A gaat.
 Dus de kans dat een klant wiens rekening langer dan een maand maar korter dan 2 maanden open stond, betaalt. Of: de kans dat een klant die na 1 maand nog niet betaald had, alsnog binnen 1 maand betaalt.
 Het element r_{32} geeft de kans dat een B klant de volgende maand weer niet betaalt, ofwel de kans dat een nota die minder dan één maand open staat de volgende maand nog steeds open staat.
 Het element r_{52} is de kans dat een B klant in één maand tijd tot wanbetaler wordt gekwalificeerd.
 b Het is onmogelijk om vanuit één van de categorieën naar B over te gaan.
 c Een wanbetaler wordt afgeboekt en blijft dus wanbetaler.
 d De GR geeft

$$R^3 \cdot K = C \begin{pmatrix} A & 0,985 \\ B & 0 \\ C & 0 \\ D & 0 \\ E & 0,015 \end{pmatrix}$$

De kans dat een B klant binnen 3 maanden betaalt is 0,985, de kans dat hij na 3 maanden als wanbetaler wordt afgeboekt is 0,015. Andere mogelijkheden zijn er niet.

- e Bereken $R^3 \cdot B$ met
- $$B = C \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 120\,000 \\ C & 60\,000 \\ D & 15\,000 \\ E & 5\,000 \end{pmatrix}$$

De GR geeft

$$R^3 \cdot B = C \begin{pmatrix} A & 176\,700 \\ B & 0 \\ C & 0 \\ D & 0 \\ E & 23\,300 \end{pmatrix}$$

Uiteindelijk wordt € 23 300 afgeboekt. Hiervoor wordt de deurwaarder ingeschakeld.

- 35** a De GR geeft
- $$\begin{pmatrix} \text{onbsp.} & \text{bsp.} \\ \text{I} & \begin{pmatrix} 6300 & 9500 \\ 4600 & 7000 \end{pmatrix} \\ \text{II} & \end{pmatrix} = V \cdot P$$

De getallen geven per filiaal de waarde in euro's van de voorraad met en zonder bespanning.

- b Als alle onbespannen rackets verkocht worden levert dat $6300 + 4600 = 10\,900$ euro op.

- c
- | | | | | | |
|-------|--------|------|-----------|-------|---|
| | onbsp. | bsp. | | | |
| h | 0,3 | 0,7 | → samen 1 | $H =$ | onbsp. $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,7 & 0,8 & 0,9 \end{pmatrix}$ |
| G = m | 0,2 | 0,8 | → samen 1 | | bsp. |
| k | 0,1 | 0,9 | → samen 1 | | |

- d
- $$V \cdot G = \begin{pmatrix} \text{onbsp.} & \text{bsp.} \\ \text{I} & \begin{pmatrix} 19 & 61 \\ 14 & 46 \end{pmatrix} \\ \text{II} & \end{pmatrix}$$

De getallen geven per filiaal de aantallen rackets die onbespannen en bespannen verkocht worden.

- e
- $$P \cdot H = \begin{pmatrix} \text{h} & \text{m} & \text{k} \\ \text{h} & \begin{pmatrix} 78 & - & - \\ - & 152 & - \\ - & - & 106 \end{pmatrix} \\ \text{P} \cdot H = \text{m} & \\ \text{k} & \end{pmatrix}$$

De getallen geven de gemiddelde opbrengst van elk soort racket.

36 a Het element l_{99} is niet nul.

$$\begin{aligned} \text{b } l_{21} &= \frac{1068}{1090} \approx 0,98 & l_{43} &= \frac{596}{618} \approx 0,96 & l_{65} &= \frac{351}{383} \approx 0,92 & l_{87} &= \frac{115}{173} \approx 0,66 \\ l_{32} &= \frac{804}{820} \approx 0,98 & l_{54} &= \frac{454}{477} \approx 0,95 & l_{76} &= \frac{223}{267} \approx 0,84 \end{aligned}$$

Van de 26 000 vrouwen 80+ in 1960 leven er nog $0,11 \times 26\,000 \approx 3000$ in 1970.

$$\text{Dus } l_{98} = \frac{37-3}{84} = \frac{34}{84} \approx 0,41.$$

Samen met de gegevens over D geeft dit de volgende Lesliematrix

$$\begin{array}{c} \text{naar} \\ \begin{array}{c} 0-9 \\ 10-19 \\ 20-29 \\ 30-39 \\ 40-49 \\ 50-59 \\ 60-69 \\ 70-79 \\ 80+ \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{c} 0-9 \\ 10-19 \\ 20-29 \\ 30-39 \\ 40-49 \\ 50-59 \\ 60-69 \\ 70-79 \\ 80+ \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0,52 & 0,83 & 0,45 & 0,08 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,92 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,84 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,41 & 0,11 \end{pmatrix} = L$$

c De GR geeft

$$L^4 \cdot \begin{pmatrix} 1264 \\ 1068 \\ 804 \\ 596 \\ 454 \\ 351 \\ 223 \\ 115 \\ 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2789 \\ 2251 \\ 1830 \\ 1408 \\ 1107 \\ 878 \\ 567 \\ 289 \\ 105 \end{pmatrix}$$

De laatste kolommatrix geeft de samenstelling van de vrouwelijke bevolking van Chili in 2010 (aantallen $\times 1000$).

37 a $P(\text{minstens één keer uitgeleend}) = 1 - P(\text{nog niet uitgeleend}) = 1 - 0,15 \cdot 0,45 \cdot 0,70 \approx 0,95$

b $P(\text{nog nooit uitgeleend}) = 0,15 \cdot 0,45 \cdot 0,70 \cdot 0,80 \approx 0,04$

c Van de 20 boeken zijn $20 \cdot 0,70 \cdot 0,80 = 11,2$ uit de roulatie genomen en van de 12 boeken $12 \cdot 0,80 = 9,6$.

In totaal $11,2 + 9,6 = 20,8 \approx 21$ boeken.

d $400 \cdot 0,15 \cdot 0,45 \cdot 0,70 \cdot 0,80 + 50 \cdot 0,45 \cdot 0,70 \cdot 0,80 + 20,8 = 48,52 \approx 49$ boeken.

e De fractie die eerst onuitgeleend uit de roulatie werd genomen is 0,0378 (vraag b).

In de nieuwe situatie wordt dat $0,1 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,7 = 0,0168$.

Omdat $\frac{1}{2} \cdot 0,0378 = 0,0189$ en $0,0168 < 0,0189$ heeft de directeur gelijk.

38 a Vanille-ijs: $15 \cdot 16 + 10 \cdot 16 \cdot 0,6 + 8 \cdot 80 \cdot 0,125 = 416$ liter

Aardbeienijs: $10 \cdot 16 \cdot 0,4 + 4 \cdot 16 = 128$ liter

b De grondstofkosten zijn $416 \cdot 2,80 + 128 \cdot 3,10 = 1561,60$ euro.

De verpakkingskosten zijn

$(15 + 10 + 4) \cdot 16 \cdot 0,10 + 8 \cdot 80 \cdot 0,10 + (15 + 10 + 4 + 8) \cdot 1,10 = 151,10$ euro.

De transportkosten zijn $(15 + 10 + 4 + 8) \cdot 2,10 = 77,70$ euro.

Totale kosten: $1561,60 + 151,10 + 77,70 = 1790,40$ euro.

De inkomsten zijn $15 \cdot 60 + 10 \cdot 64 + 70 \cdot 4 + 8 \cdot 80 = 2460$ euro.

De winst is $2460 - 1790,40 = 669,60$ euro.

- c M is een 2×4 -matrix met op de bovenste rij de hoeveelheden vanille-ijs en op de onderste rij de hoeveelheden aardbeienijs per doos.
 Voor een doos duo-ijs is nodig $0,6 \cdot 16$ liter vanille-ijs en $0,4 \cdot 16$ liter aardbeienijs.
 Voor een doos met kleine pakjes vanille-ijs is nodig $80 \cdot 0,125 = 10$ liter vanille-ijs.

Zo krijg je $M = \begin{pmatrix} 16 & 9,6 & 0 & 10 \\ 0 & 6,4 & 16 & 0 \end{pmatrix}$.

d Noem $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = P$.

$$W = (A - B \cdot M - C) \cdot P = A \cdot P - B \cdot M \cdot P - C \cdot P$$

$A \cdot P$ geeft de inkomsten.

$C \cdot P$ geeft de verpakingskosten en de transportkosten.

Dus in $B \cdot M \cdot P$ staan de grondstofkosten.

$M \cdot P$ geeft 2×1 -matrix $B \cdot (M \cdot P)$ dus B is een 1×2 -matrix

$$2 \times 4 \cdot 4 \times 1 \quad ? \times 2 \cdot 2 \times 1$$

Je krijgt $B = (2,80 \quad 3,10)$.

- 39** a Per schildpad komen 100 eieren uit.

$$75\% = 100 \text{ eieren, dus } 100\% = \frac{100}{75} \cdot 100 \approx 133 \text{ eieren.}$$

Per vrouwtje zijn dat $3 \cdot 133 \approx 400$ eieren.

In de leeftijdsklasse IV, dat is van 75 tot 100 jaar.

- b De GR geeft

van

$$\text{naar } \begin{pmatrix} 1,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,25 \end{pmatrix} = L^4$$

Per 100 jaar een toename van 25%.

- c In L^4 komt nu $0,5 \cdot 1,25 = 0,625$ op de hoofddiagonaal.

Los op $0,625^x = 0,5$.

Voer in $y_1 = 0,625^x$ en $y_2 = 0,5$.

Intersect geeft $x \approx 1,47$.

De tijdseenheid van L^4 is 100 jaar, dus na $1,47 \cdot 100 = 147$ jaar is nog de helft over.